
TD3 : Applications linéaires en dimension finie et dualité

Exercice 1. Préliminaire à faire chez soi

On se demande si les conditions proposées permettent de définir des applications linéaires. Le cas échéant, on demande de donner l'expression de $g(x, y)$ ou $g(x, y, z)$. Commentez les solutions données en italique.

1. $g(1, 0) = (2, -1)$, $g(0, 1) = (0, -1)$.
 - (a) *La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est libre dans \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (x, -x - y)$.*
 - (b) *La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est génératrice dans \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (2x, -x - y)$.*
 - (c) *La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (2x, -x + y)$.*
2. $g(1, 0) = (1, 2)$, $g(1, 1) = (2, 1)$, $g(-1, 1) = (0, 1)$.
 - (a) *La famille $\{(1, 0), (1, 1)\}$ est une base, ce qui permet de définir g . La valeur de g en $(-1, 1)$ peut être fixée arbitrairement. On a alors $g(x, y) = (x + y, 2x - y)$.*
 - (b) *Une telle application ne peut pas être linéaire car on a $(-1, 1) = -2(1, 0) + (1, 1)$ et $g(-1, 1) = (0, 1)$, alors que $-2g(1, 0) + g(1, 1) = (0, -3)$.*
3. $g(1, 1) = (1, 0, 0)$, $g(1, -1) = (2, 1, 1)$.
La famille $\{(1, 0, 0), (2, 1, 1)\}$ ne forme pas une base de \mathbb{R}^3 , les données proposées ne permettent donc pas de définir l'application g souhaitée.
4. $g(1, 0, 0) = (1, 2)$, $g(0, 1, 0) = (-1, 1)$.
La famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ est libre, ce qui permet de définir l'application g de façon unique. On a $g(x, y, z) = (x - y, 2x + y)$.

Solution.

1. La bonne solution est que la famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (2x, -x - y)$.
2. La deuxième solution est correcte. La première ne l'est pas. On peut par exemple calculer $g(1, -1)$ avec la formule donnée pour g .
3. La bonne réponse est la suivante : la famille $\{(1, 1), (1, -1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = \frac{1}{2}(3x - y, x - y, x - y)$.
4. Attention, la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ est libre mais n'est pas une famille génératrice pour \mathbb{R}^3 . On peut définir une infinité de fonctions g linéaires qui conviennent en fixant, par exemple, comme on le souhaite l'image du vecteur $(0, 0, 1)$ (dans la proposition, on a fixé $g(0, 0, 1) = (0, 0)$ mais tout autre vecteur serait convenable aussi).

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $f(x, y, z)$.
2. Trouver une base de $\text{Im} f$. Donner son équation dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. En déduire $\dim(\text{Ker} f)$. Donner une base de $\text{Ker} f$.
4. Vérifier que $\text{Ker} f$ et $A = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
5. Montrer que l'application linéaire g de A dans \mathbb{R}^3 définie par $g(1, 1, 0) = (1, 0, 3)$ et $g(1, 0, 1) = (1, 1, 7)$ est une bijection de A sur $\text{Im} f$.

Solution.

1. On a $f(x, y, z) = (x + y - z, y + z, 3x + 7y - z)$.
2. La famille $\{(1, 0, 3), (1, 1, 7), (-1, 1, 1)\}$ est génératrice pour $\text{Im} f$ mais elle n'est pas libre. En effet $(1, 1, 7) = 2(1, 0, 3) + (-1, 1, 1)$. [On peut trouver cette relation en appliquant le pivot de Gauss à la famille de vecteurs :

$$\begin{aligned}\text{Vect}((1, 0, 3), (1, 1, 7), (-1, 1, 1)) &= \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, 4), (0, 1, 4)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, 4)),\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2 - \alpha e_1, e_3 - \beta e_1)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.]

Une base de $\text{Im} f$ est donc donnée par le choix de deux vecteurs, par exemple $(1, 0, 3)$ et $(-1, 1, 1)$ (on vérifie facilement qu'ils ne sont pas liés). On a donc

$$\text{Im} f = \{(a - b, b, 3a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Pour trouver les équations linéaires caractérisant $\text{Im} f$, on écrit

$$\begin{aligned}\text{Im} f &= \{(x, y, z) = (a - b, b, 3a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x = a - b, y = b, z = 3a + b, a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x + y = a, y = b, z = 3x + 4y, a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x + 4y\},\end{aligned}$$

puisque les deux équations $x + y = a, y = b$ sont échelonnées et non contraignantes sachant que a et b sont quelconques.

3. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker} f = 1$. On trouve par exemple que $(2, 1, -1)$ est une base pour $\text{Ker} f$.
4. La famille $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, -1)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 , donc $A + \text{Ker} f = \mathbb{R}^3$. Un calcul de dimension nous assure que $A \cap \text{Ker} f$ est réduit à zéro (on peut aussi faire le calcul explicitement, ou conclure directement par le fait que nous avons donné une base de \mathbb{R}^3).
5. On a que $\{(1, 0, 3), (1, 1, 7)\}$ est une base de $\text{Im} f$. Donc g envoie une base de A en une base de $\text{Im} f$ et donc est un isomorphisme entre ces deux espaces.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = P(2) + P(0)X$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X)$.
3. Donner la matrice de φ dans la base $(1, X, X(X - 2))$.
4. Déterminer $\text{Im} \varphi$ et $\text{Ker} \varphi$. Vérifier le théorème du rang.

Solution.

1. Vérifier que $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$.
2. On a $\varphi(1) = 1 + X$, et $\varphi(X) = 2$.
3. D'après la question précédente (et en calculant la valeur de φ en $X(X - 2)$),

$$M(\varphi)_{(1, X, X(X-2))} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On a d'une part $\text{Ker}(\varphi) = \{P(X) \mid \deg P \leq 2 \text{ et } P(2) = P(0) = 0\} = \{aX(X - 2) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2 - 2X)$.

D'autre part, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X]$: l'inclusion $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_1[X]$ est obtenue par la définition de φ et le polynôme $aX + b$ est l'image de $\frac{b-a}{2}X + a$ via φ .

On a $\dim \text{Ker}(\varphi) = 1$ et $\dim \text{Im}(\varphi) = 2$, et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, ce qui vérifie le théorème du rang.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie par : pour toute matrice M ,

$$\varphi(M) = AM - MA$$

est une application linéaire.

2. Donner la matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de φ dans la base canonique \mathcal{B} de \mathcal{M}_2 .
3. φ est-elle injective ? surjective ?

Solution.

1. Pour toutes matrices M et M' et tous scalaires λ, λ' ,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + \lambda' M') &= A(\lambda M + \lambda' M') - (\lambda M + \lambda' M')A \\ &= \lambda AM + \lambda' AM - \lambda MA - \lambda' M'A \\ &= \lambda(AM - MA) + \lambda'(AM' - M'A) \\ &= \lambda \varphi(M) + \lambda' \varphi(M'). \end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

2. Rappelons que la base canonique de \mathcal{M}_2 est composée des 4 matrices

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & 2c \end{pmatrix} \\ &= 2cE_{11} + 2(d-a)E_{12} + 2cE_{22}. \end{aligned}$$

La matrice de φ est donc :

$$[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. L'application φ n'est pas injective puisque $\varphi(E_{12}) = 0_E$, et comme c'est un endomorphisme, elle n'est donc pas surjective. En particulier E_{21} n'a pas d'antécédent.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E . On note T l'endomorphisme de E défini par

$$T(e_1) = T(e_3) = e_3, \quad T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Ecrire la matrice de T dans \mathcal{E} .
2. Déterminer le noyau de T , et sa dimension.
3. On pose : $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Montrez que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
4. Calculez la matrice de T dans \mathcal{F} .
5. En déduire la nature de T .

Solution.

1. Posons $M(T)_{\mathcal{E}}$ la matrice de T dans la base \mathcal{E} . Alors

$$M(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On peut donc écrire pour $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $T(u) = -ye_1 + ye_2 + (x + y + z)e_3$. Ainsi

$$T(u) = 0_E \text{ ssi } \begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{ i.e } \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Le sous-espace vectoriel $\text{Ker } f$ est la droite vectorielle $\{xe_1 - xe_3, x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_1 - e_3)$. Il est donc de dimension 1.

3. Comme \mathcal{F} a 3 vecteurs en dimension 3, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$. On a : $\lambda_1(e_1 - e_3) + \lambda_2(e_1 - e_2) + \lambda_3(-e_1 + e_2 + e_3) = 0_E$, c'est-à-dire $(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)e_1 + (-\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + (-\lambda_1 + \lambda_3)e_3 = 0_E$. Comme \mathcal{E} est une base, donc une famille libre, il vient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille est libre, c'est donc une base de E qui est de dimension 3.

4. On calcule $T(f_1) = T(e_1 - e_3) = T(e_1) - T(e_3) = e_3 - e_3 = 0_E$.
Puis $T(f_2) = T(e_1 - e_2) = T(e_1) - T(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$.
Et enfin $T(f_3) = T(-e_1 + e_2 + e_3) = -T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = -e_3 + (-e_1 + e_2 + e_3) + e_3 = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$.

On en déduit la matrice

$$M(T)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. L'application T est la projection sur $\text{Vect}(f_2, f_3)$ de direction $\text{Vect}(f_1)$.

Exercice 6. On considère \mathbb{R}^3 , sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $u(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Ecrire la matrice A de u dans la base \mathcal{E} .
3. Calculer A^2 en fonction de A et de I_3 . En déduire que A est inversible et déterminer u^{-1} .
4. Montrer que les vecteurs $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_2 - e_3$, $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$ forment une base de \mathbb{R}^3 notée \mathcal{B} et écrire les matrices de passage P de \mathcal{E} à \mathcal{B} et P^{-1} de \mathcal{B} à \mathcal{E} .
5. Déterminer la matrice A' de u dans \mathcal{B} . Calculer A'^n , en déduire A^n puis l'expression de u^n .

Solution.

1. L'application u est linéaire : pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ et tous réels λ, μ ,

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu x') &= u(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \lambda x_3 + \mu x'_3) \\ &= (\lambda x_2 + \mu x'_2 + \lambda x_3 + \mu x'_3, \lambda x_1 + \mu x'_1 + \lambda x_3 + \mu x'_3, \lambda x_1 + \mu x'_1 + \lambda x_2 + \mu x'_2) \\ &= \lambda(x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) + \mu(x'_2 + x'_3, x'_1 + x'_3, x'_1 + x'_2) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(x'). \end{aligned}$$

2. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 et Y celui de $u(x)$. On peut écrire

$$Y = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On constate que $A^2 = 2I_3 + A$.

4. De la relation précédente, on écrit : $I_3 = \frac{1}{2}(A^2 - A) = \frac{1}{2}(A - I_3)A = (\text{penser à écrire } A = I_3.A)$. Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Par suite $u^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

5. Montrons que la famille \mathcal{B} est libre : supposons $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme $\varepsilon_1 = (1, 0, -1)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, -1)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$, on a donc $(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$, et donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ soit encore } , \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est bien libre. Comme \mathcal{B} a 3 vecteurs, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

La matrice de passage de \mathcal{E} à \mathcal{B} s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer P^{-1} , on peut inverser la matrice ou écrire les vecteurs de \mathcal{E} en fonction de \mathcal{B} et en déduire P^{-1} :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 - e_3, \\ \varepsilon_2 = e_2 - e_3, \\ \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + e_3, \\ e_2 = \varepsilon_2 + e_3, \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3, \\ e_2 = -\frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3, \\ e_3 = -\frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3. \end{cases}$$

Ainsi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $PP^{-1} = I_3$.

6. On peut calculer la matrice A' par la formule $A' = P^{-1}AP$, mais on peut aussi directement calculer les vecteurs $u(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2, 3$ et les exprimer dans la base \mathcal{B} . Il vient :

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= u(1, 0, -1) = (-1, 0, 1) = -\varepsilon_1 \\ u(\varepsilon_2) &= u(0, 1, -1) = (0, -1, 1) = -\varepsilon_2 \\ u(\varepsilon_3) &= u(1, 1, 1) = (2, 2, 2) = 2\varepsilon_3. \end{aligned}$$

On en déduit

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Par suite, tous calculs faits,

$$A^n = (PA'P^{-1})^n = PA^nP^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour calculer A^n , une autre solution plus élégante consiste à remarquer que $A = J - I_3$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Or J commute avec I_3 . On peut donc calculer $A^n = (J - I_3)^n$ par la formule du binôme. Comme $J^2 = 3J$, par récurrence on obtient $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \geq 1$, ce qui permet d'achever le calcul de A^n . Calcul laissé à la bonne volonté du lecteur.

Exercice 7. (*) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im} f$ est de dimension inférieure ou égale à 1 (Indication : on pourra montrer que $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$).
2. En déduire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tels que $\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = g(u).v$.

Solution.

1. Comme $f^2 = 0$, on a pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = 0$ donc $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$. Ainsi $\text{rg} f \leq \dim \text{Ker} f$. En utilisant le théorème du rang, on a $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \text{rg} f + \dim \text{Ker} f$. On en déduit donc que $3 \geq 2\text{rg} f$, ce qui nous assure que $\text{rg} f \leq 1$ (comme $\text{rg} f$ est entier).
2. Comme $\dim \text{Im} f \leq 1$, on a que $\text{Im} f = \text{Vect}(v)$ avec v un vecteur éventuellement nul. Si $v = 0$, il suffit de choisir $g = 0$ et le résultat est démontré. Sinon pour tout $u \in E$, il existe $g(u) \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = g(u)v$. Il reste alors à vérifier que g est linéaire. Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de f ,

$$g(\lambda u_1 + u_2)v = f(\lambda u_1 + u_2) = \lambda f(u_1) + f(u_2) = (\lambda g(u_1) + g(u_2))v.$$

Comme $v \neq 0$, on en déduit que g est linéaire.

Exercice 8. Soit la base de \mathbb{R}^n :

$$e_1 = (1, \dots, 1), e_2 = (0, 1, \dots, 1), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

1. Déterminer la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ duale de celle-ci.
2. En déduire l'annulateur de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})$.
3. Décrire un système d'équations linéaires dont les solutions sont exactement tous les vecteurs de F (justifier votre réponse bien entendu).

Solution.

1. La base duale de la base (e_1, \dots, e_n) est la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) de formes linéaires sur \mathbb{R}^n définie par

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad e_j^*(e_i) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Fixons j et notons $e_j^*(x) = a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{ij} + a_{i+1j} + \dots + a_{nj} = \delta_{ij}.$$

On en déduit : $e_1^*(x) = x_1$ et $e_j^*(x) = -x_{j-1} + x_j$ pour tout $j \geq 2$.

2. L'annulateur de F est $F^\circ = \{\omega \in E^* \mid \omega(v) = 0, \forall v \in F\}$. Il est facile de voir que $F^\circ = \text{Vect}(e_{n-1}^*, e_n^*)$.
3. En utilisant la question précédente, on trouve que les vecteurs de F vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} -x_{n-2} + x_{n-1} &= 0 \\ -x_{n-1} + x_n &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_{n-2} = x_{n-1} = x_n$$

De plus, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est tel que $x_{n-2} = x_{n-1} = x_n$, on peut remarquer que $x = x_1 e_1 + (x_2 - x_1) e_2 + \dots + (x_{n-2} - x_{n-3}) e_{n-2}$ donc les solutions du système linéaire sont bien uniquement les vecteurs de F .

Exercice 9. (*) Montrer que les formes linéaires

$$\varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad \varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \quad \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$$

forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Déterminer la base duale de celle-ci [en identifiant \mathbb{R}^3 avec $(\mathbb{R}^3)^{**}$.]
Remarque : après identification, on appelle la base de \mathbb{R}^3 obtenue la base *antéduale* de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Solution. Pour voir que les formes linéaires (φ_i) forment une base, il suffit de vérifier qu'elles forment une famille libre. Supposons que

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0,$$

c'est-à-dire que pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x_1 + (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3)x_2 + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)x_3 = 0.$$

En particulier, en appliquant cette égalité aux vecteurs de la base canonique, on trouve le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

Ce système admet pour unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ donc la famille est bien libre.

Remarque : on aurait aussi pu montrer que le système “transposé”

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0. \end{cases}$$

admet une unique solution (qui est $(0, 0, 0)$) puisque le rang d'un système et de son système “transposé” sont les mêmes.

Notons $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^{**}$ duale de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, c'est-à-dire vérifiant : $\omega_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$. L'identification canonique $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^3)^{**}$, $x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$ nous assure qu'il existe $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\omega_j(\varphi) = \varphi(v_j)$ pour tout $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ et $j = 1, 2, 3$. Pour trouver les vecteurs v_j , il suffit donc de résoudre : $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i = 1, 2, 3$. On trouve $v_1 = (-18, 7, 5)$, $v_2 = (5, -2, -1)$ et $v_3 = (3, -1, -1)$.

Exercices complémentaires

Exercice 10. *En guise d'entraînement seul-e chez soi*

On considère \mathbb{R}^3 , sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et deux familles de vecteurs : $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et $\mathcal{E}'' = (e''_1, e''_2, e''_3)$ définies par

$$\begin{cases} e'_1 &= 3e_1 + 2e_2 \\ e'_2 &= e_1 \\ e'_3 &= -e_1 + e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e''_1 &= e'_1 \\ e''_2 &= e'_2 - e'_3 \\ e''_3 &= e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{cases}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

1. Vérifier que \mathcal{E}' , \mathcal{E}'' sont des bases de E et donner les matrices de passages P de \mathcal{E} à \mathcal{E}' , P' de \mathcal{E}' à \mathcal{E}'' et P'' de \mathcal{E} à \mathcal{E}'' ainsi que la matrice de passage de \mathcal{E}' à \mathcal{E} .

2. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
3. Ecrire la matrice $Mat(f, \mathcal{E})$, $Mat(f, \mathcal{E}', \mathcal{E})$ et $Mat(f, \mathcal{E}')$.

Solution. Comparer avec le travail de ses camarades ou demander à son enseignant.

Des applications linéaires plus abstraites

Exercice 11. (*) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $s^2 = \text{Id}$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$ sont en somme directe
 - (b) Montrer que $\forall x \in E, \frac{1}{2}(x + s(x)) \in \text{Ker}(s - \text{Id})$
 - (c) Montrer que $\forall x \in E, \frac{1}{2}(x - s(x)) \in \text{Ker}(s + \text{Id})$
 - (d) En déduire que $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$ sont supplémentaires.
 - (e) Comment construire une base de E adaptée à la décomposition précédente? Comment s'écrit la matrice de s dans cette base?
2. Réciproquement, soient F et G deux supplémentaires dans E . Si $x = x_F + x_G$, on définit s par

$$s(x) = x_F - x_G.$$

[L'application s s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G .] Vérifier que s est une application linéaire, puis que $s^2 = \text{Id}$.

Solution.

1. (a) Soit $x \in \text{Ker}(s - \text{Id}) \cap \text{Ker}(s + \text{Id})$. Alors $s(x) = x = -s(x)$ donc $s(x) = 0$ et $x = 0$. Ainsi $\text{Ker}(s - \text{Id}) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}) = \{0\}$
- (b) Pour tout $x \in E$, on a par linéarité de s et en utilisant le fait que $s^2 = \text{Id}$

$$s\left(\frac{1}{2}(x + s(x))\right) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x)$$

donc $\frac{1}{2}(x + s(x)) \in \text{Ker}(s - \text{Id})$.

- (c) De même

$$s\left(\frac{1}{2}(x - s(x))\right) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -\frac{1}{2}(x - s(x))$$

donc $\frac{1}{2}(x - s(x)) \in \text{Ker}(s + \text{Id})$.

- (d) Comme pour tout $x \in E$, $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$, on déduit des trois questions précédentes que $E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id})$.
- (e) Pour construire une base adaptée à la décomposition, on fixe (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et (e_{r+1}, \dots, e_n) une base de $\text{Ker}(s + \text{Id})$. Alors la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Dans cette base, la matrice de s s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soient $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ deux vecteurs de E que l'on décompose sur $F \oplus G$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} s(\lambda x + y) &= s(\lambda(x_F + x_G) + (y_F + y_G)) = s((\lambda x_F + y_F) + (\lambda x_G + y_G)) \\ &= \lambda x_F + y_F - (\lambda x_G + y_G) = \lambda(x_F - x_G) + y_F - y_G = \lambda s(x) + s(y), \end{aligned}$$

ce qui nous assure que s est linéaire. De plus, pour tout $x = x_F + x_G \in E = F \oplus G$, on a $s^2(x) = s^2(x_F + x_G) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x$, c'est-à-dire $s^2 = \text{Id}$.

Exercice 12. (*) Soit E de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, i.e. il existe un entier k tel que $u^k = 0$. On note p le plus petit entier tel que $u^p = 0$. On suppose $p \geq 2$. Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre dans E .
2. En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0$.
3. On suppose $p = n$. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.
4. Montrer que $u - \text{Id}_E$ est inversible. [Indication : considérer $\text{Id}_E + u + \dots + u^{p-1}$]

Solution.

1. Soit $(\lambda_i)_{i=1, \dots, p} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\lambda_1 x + \lambda_2 u(x) + \dots + \lambda_p u^{p-1}(x) = 0$. Supposons que les λ_i ne sont pas tous nuls et notons $i_0 \geq 0$ le plus petit entier tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. En appliquant u^{p-1-i_0} à l'égalité, nous trouvons $\lambda_{i_0} u^{p-1}(x) = 0$. Comme $u^{p-1}(x) \neq 0$, on en déduit que $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui est contraire à ce que l'on avait supposé. Finalement tous les λ_i sont nuls et la famille est libre.
2. Comme E est de dimension n , toute famille libre est de cardinal $\leq n$. Il s'ensuit que $p \leq n$.
3. La famille est libre par la première question et elle est de cardinal $n = \dim E$, c'est donc une base. La matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Nous avons $(u - \text{Id}_E)(\text{Id}_E + u + \dots + u^{p-1}) = u^p - \text{Id}_E = -\text{Id}_E$. Ainsi $u - \text{Id}_E$ est inversible, d'inverse $-(\text{Id}_E + u + \dots + u^{p-1})$.

Exercice 13. (*) Soient E, F deux espaces vectoriels sur K et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On définit une application (dite *transposée* de f) :

$${}^t f : F^* \rightarrow E^*$$

en posant pour toutes $\varphi \in F^* : {}^t f(\varphi) := \varphi \circ f$.

1. Montrer que ${}^t f$ applique bien F^* dans E^* .
2. Montrer que ${}^t f$ est une application linéaire.

3. On suppose que E et F sont de dimension finie et soient $\{e_i\}$, $\{\varepsilon_j\}$ des bases de E et F respectivement, $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_j\}$ leurs bases duales. On note $A = \text{Mat}(f)_{e_i, \varepsilon_j}$. Montrer que :

$$\text{Mat}({}^t f)_{\psi_i, \varphi_j} = {}^t A.$$

Solution.

1. Comme $f : E \rightarrow F$ et $\varphi : F \rightarrow K$ sont des applications linéaires, la composée $\varphi \circ f : E \rightarrow K$ est aussi une application linéaire (et en particulier une forme linéaire sur E).
2. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in F^*$ et $\lambda \in K$. Alors

$${}^t f(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = (\lambda\varphi_1 + \varphi_2) \circ f = \lambda\varphi_1 \circ f + \varphi_2 \circ f = \lambda {}^t f(\varphi_1) + {}^t f(\varphi_2)$$

donc ${}^t f$ est bien une application linéaire.

3. Notons $A = (a_{ij})_{ij}$ et $\text{Mat}({}^t f)_{\varphi_i, \psi_j} = (b_{ij})_{ij}$, c'est-à-dire

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^p a_{ki} \varepsilon_i \quad \text{et} \quad ({}^t f)(\psi_j) = \sum_{i=1}^p b_{ji} \varphi_i.$$

Alors $(\psi_j \circ f)(e_k) = \psi_j(f(e_k)) = a_{kj}$ et $({}^t f)(\psi_j)(e_k) = b_{jk}$, ce qui donne $a_{kj} = b_{jk}$ et donc $\text{Mat}({}^t f)_{\varphi_i, \psi_j} = {}^t A$.